

Львівський національний університет
імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ
(Текст лекції)

Львів — 2023

Рекомендовано до друку
кафедрою теорії функцій
та функціонального аналізу

Лекція рекомендована для учнів старших класів та студентів першого курсу математичних спеціальностей

Текст підготував
доцент Притула Ярослав Григорович

© кафедра теорії функцій та функціонального аналізу, 2023

Вступ

Метод математичної індукції¹ має безпосередній зв'язок з поняттям натурального числа. Він застосовується у різних областях математики. У тексті лекції не аналізується зв'язок принципу математичної індукції, який є основою методу, з означенням натуральних чисел, а розглядається застосування цього методу до розв'язування задач з арифметики, алгебри та геометрії.

Розглянуті приклади не вичерпують всіх застосувань методу математичної індукції.

1. Часткові та загальні твердження. Дедукція та індукція

Твердження бувають часткові і загальні. Наведемо деякі приклади.

- (1) Число 130 ділиться на 5.
- (2) Число, яке закінчується нулем, ділиться на 5.
- (3) Усі студенти отримують стипендію.
- (4) Студент Іваник отримує стипендію.

Твердження (1), (4) - часткові, а (2), (3) - загальні. із загального твердження (2), маючи часткове твердження "Число 130 закінчується нулем ми отримуємо часткове твердження (1).

Перехід від загального твердження до часткового називається **дедукцією**.

Нас буде цікавити спосіб переходу від часткових тверджень до загальних. Такий перехід називається **індукцією**.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Треба знайти вираз цієї суми для довільного n . Легко перевірити, що

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

На основі зауваженої закономірності стверджуємо, що для довільного натурального n :

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

¹див. п.8

Приклад 2. Розглянемо многочлен

$$x^2 + x + 41.$$

Підставимо у многочлен замість x числа

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10.$$

Отримаємо відповідно

$$41, 43, 47, \dots, 151.$$

Усі ці числа є простими. Можемо зробити висновок, що для довільного $x = n$ число $n^2 + n + 41$ є простим. Але виявляється, що при $n = 40$ число $40^2 + 40 + 41$ ділиться на 41, тобто не є простим.

Так, якщо у прикладі 1 зроблений висновок випадково виявився правильним, то у прикладі 2 висновок є невірним.

Метод міркувань, при якому висновок робиться на основі досить великого числа випадків (але не всіх), називається **неповною індукцією**. На прикладах ми побачили, що метод неповної індукції не завжди дає вірні результати. Однак цей метод дозволяє дати першу гіпотезу, яку потім можна довести або заперечити. Розглянемо ще один приклад.

Приклад 3. Знайдемо суму перших n непарних чисел. Отримаємо

$$n = 1 \quad 1 = 1 = 1^2,$$

$$n = 2 \quad 1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$n = 3 \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$n = 4 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$

$$n = 5 \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

Тут n - кількість доданків. Ми легко помітили закономірність, що сума n непарних чисел дорівнює n^2 , тобто квадрату кількості доданків. Тому висловлюється гіпотеза, що для довільного n

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Але ми впевнені у вірності цієї рівності лише для $n = 1, 2, \dots, 5$, а для всіх n її ще треба довести.

Для доведення таких тверджень, які стосуються натуральних чисел, існує метод математичної індукції.

2. Метод математичної індукції

Довільні твердження відносно натуральних чисел будемо позначати $T(n)$. В основі методу математичної індукції лежить принцип математичної індукції.

Принцип математичної індукції. Якщо твердження $T(n)$ вірне для $n = 1$, а з істинності цього твердження для $n = k$ випливає його істинність для $n = k + 1$, тоді твердження $T(n)$ вірне для довільних натуральних n .

Доведення. Припустимо супротивне. Тобто нехай для деяких n твердження $T(n)$ невірне. Тоді серед тих n знайдеться найменше. Позначимо його n_0 . Таким чином маємо, що $T(n_0)$ - невірне, а $T(n_0 - 1)$ - вірне твердження. Але це суперечить умові, що з вірності твердження для $k = n_0 - 1$ випливає вірність для $k + 1 = n_0$. Отримане протиріччя доводить, що припущення про існування таких n , для яких $T(n)$ не справджується, є невірним. Теорема, яку ми назвали принципом математичної індукції, доведена.

Зауваження. Доведення принципу математичної індукції опиралося на твердження, що в кожній множині натуральних чисел є найменший елемент. У частині математичної літератури принцип математичної індукції не доводиться, а приймається за аксіому. Ми за аксіому прийняли те, що в кожній множині натуральних чисел є найменший елемент.

На принципі математичної індукції ґрунтується

Метод математичної індукції. Для доведення деякого твердження $T(n)$ відносно натуральних чисел досить:

1. Показати, що для $n = 1$ $T(1)$ - вірне;
2. Показати, що з вірності $T(k)$ випливає вірність $T(k + 1)$.

Покажемо це на прикладі.

У прикладі 3 треба було довести твердження $T(n)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

1. Покажемо, що $T(1)$ - вірне: $1 = 1^2$ - вірно.
2. Нехай $T(k)$ - вірне, тобто $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ - вірне. Треба довести вірність $T(k + 1)$, тобто $1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$.

Доведемо вірність $T(k + 1)$, використавши, що $T(k)$ - вірне.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + 2(k + 1) - 1 = \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Вірність $T(k + 1)$ доведено, а значить згідно принципу математичної індукції твердження $T(n)$ вірне для довільного n .

У наведених міркуваннях є два важливі моменти: а) сформулювати, що означає твердження $T(k + 1)$, б) довести вірність $T(k + 1)$ з припущення, що $T(k)$ - вірне.

Зауваження. Іноді твердження $T(n)$ формулюється не для всіх n , а для $n \geq m$. Тоді в доведенні першим кроком буде перевірка справедливості $T(m)$.

Нижче ми розглянемо приклади застосування методу математичної індукції для доведення різного типу тверджень відносно натуральних чисел.

3. Доведення тотожностей

Приклад 4 Довести, що для довільного натурального n вірна рівність

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Позначимо $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Ми повинні довести твердження $T(n)$: "Для довільного натурального числа n вірна рівність

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2} \text{ „}.$$

1. Перевіримо істинність $T(1)$. При $n = 1$ ліва частина має один доданок 1, а права частина рівна

$$\frac{1(1 + 1)}{2},$$

тому $T(1)$ - вірне.

2. Припускаємо, що $T(k)$ - вірне, тобто $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ - справедливо. Треба довести справедливість $T(k + 1)$, тобто, що

$$1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k + 1) &= 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Згідно принципу математичної індукції рівність вірна для довільного n .

Приклад 5. Довести, що для довільного натурального n вірна рівність

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

Позначимо $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$. Твердження $T(n)$: "Для довільного натурального n вірна рівність

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ „}.$$

1. Перевіримо, чи виконується $T(1)$. При $n = 1$ маємо $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, $1 = 1$. $T(1)$ - вірне.

2. Припускаємо, що $T(k)$ - вірне, доведемо справедливність $T(k+1)$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Згідно принципу математичної індукції рівність вірна для довільного n .

Приклад 6. Довести, що для довільного натурального $n > 1$ правильна рівність

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

1. За умовою задачі $n > 1$. При $n = 2$ ліва частина має один множник $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$. Тому твердження $T(2)$: $1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$, $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. $T(2)$ - вірне.

2. Покажемо, що з істинності $T(k)$ випливає істинність $T(k+1)$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \frac{k^2 + 2k + 1 - 1}{2k(k+1)} = \frac{k(k+2)}{2k(k+1)} = \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}. \end{aligned}$$

Твердження $T(k+1)$ виконується. Згідно принципу математичної індукції рівність виконується для всіх $n > 1$.

Задачі для самостійної роботи

Довести тотожності:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.
4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
5. $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$.
6. $x + 2x^2 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.
7. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

(Через $n!$ позначається добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$).

8. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.
9. $\frac{1}{a(a+p)} + \frac{1}{(a+p)(a+2p)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)} = \frac{n}{a(a+np)}$,

де a, p - деякі натуральні числа. Розглянути цю тотожність для $a=1$ і $p=2,3,4,\dots$

4. Доведення нерівностей

Приклад 7. Довести, що для $0 < a < b$ і для довільного натурального n виконується нерівність

$$a^n < b^n.$$

1. Перевіримо виконання цього твердження при $n = 1$: $a^1 < b^1$. $T(1)$ - вірно.
2. Нехай $a^k < b^k$. Треба довести, що $a^{k+1} < b^{k+1}$. Помножимо нерівність $a^k < b^k$ на $a > 0$. Отримаємо

$$a^{k+1} < ab^k < b \cdot b^k = b^{k+1}.$$

Нерівність доведена.

Приклад 8. Довести, що для довільного натурального n виконується нерівність

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

1. Перевіримо виконання нерівності для $n = 1$. При $n = 1$ у лівій частині будуть три члени $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.
2. Нехай нерівність виконується, коли $n = k$, доведемо, що вона виконується для $n = k + 1$.

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \dots + \frac{1}{3(k+1)+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} = \\
&= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} \cdots + \frac{1}{3k+1} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} \right)
\end{aligned}$$

В останній рівності ми додали і відняли $\frac{1}{k+1}$ і виписали проміжні доданки. За припущенням сума в першій дужці більша від 1. Залишилось показати, що друга дужка більша від 0. Зробивши відповідні перетворення, одержимо

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 0.$$

Тому

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3(k+1)+1} > 1.$$

За принципом математичної індукції нерівність виконується для довільних натуральних n .

Приклад 9. Довести, що для довільного натурального $n \geq 7$ має місце нерівність

$$2^{n-1} > n(n+1).$$

1. Перевіримо твердження при $n = 7$:

$$2^{7-1} > 7(7+1), \quad 2^6 = 64 > 56.$$

$T(7)$ виконується.

2. Нехай $2^{k-1} > k(k+1)$. Доведемо, що $2^{(k+1)-1} > (k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2)$. Дійсно,

$$2^{(k+1)-1} > 2 \cdot 2^{k-1} > 2k(k+1).$$

Врахуємо, що $2k > k+2$ для $k > 2$. Тоді

$$2k(k+1) > (k+1)(k+2).$$

Тому

$$2^{(k+1)-1} > (k+1)(k+2).$$

За принципом індукції нерівність виконується для довільних натуральних n .

Приклад 10. Довести, що при $x > -1$ для всіх $n > 1$ виконується нерівність

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

1. Для $n = 1$ нерівність виконується:

$$1+x \geq 1+x.$$

2. Нехай $(1+x)^k \geq 1+kx$. Треба довести, що

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x.$$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 > 1+x(k+1)$. Нерівність доведена. З принципу математичної індукції випливає виконання нерівності для довільних n .

Задачі для самостійної роботи

Довести нерівності.

1. $2^n > n^3$ для $n \geq 10$.

2. $4^n > 3^n + n^2$.

3. $2^{n+4} \geq (n+4)^2$.

4. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ для $n > 1$.

5. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ для $n \geq 2$.

6. $1^{-2} + 2^{-2} + \dots + n^{-2} < \frac{2n-1}{n}$.

7. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

8. $\underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}}_{n \text{ коренів}} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

5. Подільність чисел

Розглянемо приклади застосування методу математичної індукції для доведення подільності чисел. **Приклад 11.** Показати, що для довільного натурального n число $n^3 + 11n$ ділиться на 6.

1. Перевіримо $T(1) : 1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ ділиться на 6.

2. Нехай $T(k)$ має місце. Доведемо, що з істинності $T(k)$ випливає істинність $T(k+1)$. Отже, дано, що $k^3 + 11k$ ділиться на 6. Треба довести, що $(k+1)^3 + 11(k+1)$ ділиться на 6. $(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12 = (k^3 + 11k) + 12 + 3k(k+1)$.

$k^3 + 11k$ ділиться на 6 за припущенням, 12 ділиться на 6 і останній доданок ділиться на 6, бо в ньому є множники 3 і 2. Наявність трійки є очевидною, а наявність множника 2 випливає з того, що серед двох чисел k і $(k+1)$ одне є парним. Значить твердження $T(n)$ вірне для довільного n .

Приклад 12. Показати, що при довільному n число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ ділиться на 19.

$T(n)$: " $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ ділиться на 19".

1. $T(1)$: $5 \cdot 2^{3 \cdot 1 - 2} + 3^{3 \cdot 1 - 1} = 5 \cdot 2 + 9 = 19$. $T(1)$ - вірно.

2. Нехай $T(k)$ - вірно твердження. Доведемо, що з нього випливає вірність $T(k+1)$: $5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 5 \cdot 2^{3k-2} \cdot 8 + 3^{3k-1} \cdot 27 = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + (27 - 8)3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}$. Очевидно, що кожен з доданків ділиться на 19, а значить і сума ділиться на 19. Тобто, ми показали, що $T(k+1)$ - вірно. За принципом математичної індукції $T(n)$ вірно для довільного n .

Приклад 13. Довести, що сума кубів трьох послідовних чисел ділиться на 9.

Позначимо $T(n)$ - "Для довільного n вираз $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ділиться на 9."

1. $T(1)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ділиться на 9. $T(1)$ - вірно твердження.

2. Нехай $T(k)$ - вірно, тобто $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ ділиться на 9. Треба довести, що $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ ділиться на 9, тобто з $T(k)$ випливає $T(k+1)$: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$. Враховуючи, що $T(k)$ - вірно, отримуємо, що $T(k+1)$ - вірно.

Задачі для самостійної роботи.

Довести, що для довільних натуральних n

1. $n^7 + 6n$ - ділиться на 7.
2. $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ - ділиться на 19.
3. $4^n + 15n - 1$ - ділиться на 9.
4. $3^{2n+3} - 24n + 37$ - ділиться на 64.
5. $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ - ділиться на 17.
6. $5^n - 3^n + 2n$ - ділиться на 4.
7. $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ - ділиться на $a^2 - a + 1$.

6. Математична індукція в геометрії.

Метод математичної індукції іноді застосовується для розв'язку геометричних задач.

Приклад 14. Довести, що n різних прямих, проведених на площині через одну точку, ділять площину на $2n$ частин.

Твердження $T(n)$ - " n різних прямих, які проведені в площині через одну точку ділять площину на $2n$ частин."

Перевіримо істинність $T(1)$. Одна пряма ділить площину на 2 частини. Значить, $T(1)$ вірне.

Нехай вірне $T(k)$. Доведемо вірність $T(k + 1)$. Якщо $T(k)$ вірне, то k прямих, які проходять через одну точку ділять площину на $2k$ частин. Проведемо через цю точку $k + 1$ -шу пряму. Вона ділить якісь два вертикальні кути на дві частини кожен. Таким чином, площа розділена на $2k + 2 = 2(k + 1)$ частин. Тому твердження $T(k + 1)$ вірне.

Приклад 15. На площині дано n прямих, серед яких немає паралельних, і ніякі три не перетинаються в одній точці. На скільки частин розділена площа?

Розв'язок почнемо з аналізу найпростіших випадків.

Якщо $n = 1$, то частин буде дві.

Якщо $n = 2$, то число частин $A(2) = 4$.

Нехай $n = 3$. З рисунка бачимо, що $A(3) = 7$.

Продовжуючи малювати картинки, одержимо таблицю

n	1	2	3	4	5	6
$A(n)$	2	4	7	11	16	22

Зауважимо, що послідовності чисел 2, 4, 7, 11, 16, 22, ... близька до послідовності $1 = 1, 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, 1+2+3+4 = 10, 1+2+3+4+5 = 15, \dots$, тільки потрібно додавати одиничку. Це дозволяє висунути гіпотезу (припущення), що число частин $A(n)$ для n прямих

$$A(n) = (1 + 2 + \dots + n) + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Оскільки перевірити цю гіпотезу для всіх натуральних n ми не можемо, то для її доведення застосуємо метод математичної індукції. Отже, нам треба довести твердження $T(n)$ - " n прямих у площині (в загальному положенні) ділять площину на $A(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ частин".

Твердження $T(1)$ вірне.

Нехай вірне твердження $T(k)$. Доведемо, що вірне твердження $T(k + 1)$, тобто треба довести наступне: якщо $A(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$, то $A(k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$.

Нехай маємо k прямих у площині, і вони ділять її на $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ частин. Проведемо $(k + 1)$ -шу пряму. Вона не паралельна жодній і не проходить через точки перетину попередніх прямих. Подивимось, що відбувається, коли вона перетинає ці попередні прямі. Виберемо на прямій напрямом і підемо по ньому. До перетину з першою попередньо визначеною прямою наша пряма ділить область на дві півплощини, і взагалі при перетині

з кожною попередньо побудованою прямою відбувається теж саме. Тому кількість частин, на які ділиться площа, збільшилась на $k + 1$ (одна - до першої, і k - після кожної з k прямих). Тому

$$A(k + 1) = A(k) + k + 1 = \frac{k(k + 1)}{2} + 1 + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} + 1,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 16. На площині проведено n кіл. Довільні два з них перетинаються (але не дотикаються), але через їх точку перетину не може проходити третє коло. На скільки частин розбивається площа?

Почнемо з розгляду простих випадків і побудови відповідної таблички. Нехай $A(n)$ - кількість областей для n кіл. Малюючи картинку, одержимо

n	1	2	3
$A(n)$	2	4	8

Можна зробити припущення, що $A(n) = 2^n$. При $n = 1, 2, 3$ гіпотеза вірна. Однак можна переконатися, що цю гіпотезу неможливо довести. Просто можна порахувати $A(4) = 14$.

Тому формулюємо нову гіпотезу:

$$A(n) = n(n - 1) + 2.$$

Пропонуємо довести її самостійно.

Задачі для самостійної роботи

а) геометричного змісту

1. На скільки трикутників розтинається n - кутник (необов'язково опуклий) своїми діагоналями, які не перетинаються?
2. Довести, що сума кутів опуклого n - кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$.
3. Розглянемо на площині замкнену ланку, яка має n ланок. Знайти найбільше можливе число перетинів ланок.

б) довільного змісту

1. із $2n$ чисел $1, 2, 3, \dots, 2n$ довільно вибрали $n + 1$ число. Довести, що серед вибраних чисел знайдуться хоча б два, одне з яких не ділиться на інше.
2. Довести, що з усіх людей, які жили коли-небудь на Землі, і які живуть нині, число людей, які зробили непарне число рукостискань, є число парне.
3. Доведіть, що для довільного n число $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ - ціле.

7. Біном Ньютона

Ще зі шкільного курсу математики всім відомі формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. існує узагальнення таких

формул - формула $(a + b)^n$, де n - довільне натуральне число, яка носить назву "біном Ньютона". ² Позначимо символом C_n^m , де n, m - натуральні числа і $n > m$, величину: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Тоді

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

Коефіцієнти C_n^m біному Ньютона володіють властивостями: $C_k^m = C_k^{k-m}$, $C_k^0 = C_k^k = 1$,

$$C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m, \quad (*)$$

які не важко встановити. Доведемо останню з них:

$$\begin{aligned} C_k^m + C_k^{m-1} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} = \\ &= \frac{k!(k-m+1) + k!m}{m!(k-m+1)!} = \frac{k!(k+1)}{m!(k-m+1)!} = \frac{(k+1)!}{m!(k+1-m)!} = C_{k+1}^m \end{aligned}$$

Доведемо формулу бінома Ньютона методом математичної індукції. Нехай $T(n)$: " $(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$ ".

1. Перевіримо справедливість $T(1)$. При $n = 1$ $a + b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$. $T(1)$ - вірне.

2. Припускаємо, що $T(k)$ - вірне, тобто:

$$(a + b)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m.$$

Треба довести виконання $T(k + 1)$, тобто, що

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= (a + b)(a + b)^k = (a + b) \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^m = \\ &= \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k-m} b^{m+1}. \end{aligned}$$

²"біном" пишеться з маленької букви, а Ньютон носив ім'я Ісаак (жарт на механіко-математичному факультеті).

В останній сумі зробимо заміну: $m' = m + 1$. Тоді

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{k+1} &= \sum_{m=0}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m'=1}^{k+1} C_k^{m'-1} a^{k-m'+1} b^{m'} = \\
 &= \sum_{m=0}^k a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=1}^{k+1} C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m = a^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^m a^{k+1-m} b^m + \\
 &+ \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} a^{k+1-m} b^m + b^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^k (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k+1-m} b^m + b^{k+1}
 \end{aligned}$$

За властивістю (*) коефіцієнтів отримуємо:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m.$$

Згідно принципу математичної індукції рівність виконується для довільного натурального n .

8. Індукція чи дедукція?

Математика здавна вважається класичним зразком чисто дедуктивної науки. Всі твердження доводяться дедуктивно, а конкретні їх застосування випливають з доведень. Доводять математичні твердження тільки дедуктивно з прийнятих вихідних припущень.

індукція відіграє в математиці безумовно вагомую роль, але дозволяє лише вгадувати розв'язок і висловлювати гіпотези.

Проаналізуємо наш "метод математичної індукції". Доведення цим методом ми отримуємо так: з припущення "принцип математичної індукції" (або іншого, на якій він опирається) отримуємо справедливність твердження $T(n)$ для всіх натуральних чисел. Таким чином, з загального (принцип математичної індукції) ми дедуктивно отримали часткове (справедливність $T(n)$). Отже, метод, який традиційно називається методом математичної індукції, є по суті дедуктивним методом.

Глибше розуміння місця в математиці принципу математичної індукції буде при вивченні теорії натуральних чисел.

9. Розділ для відпочинку

Тим, хто успішно дочитав до цього розділу, а тим більше розв'язав задачі, які пропонувалися для самостійної роботи, можемо запропонувати і відпочинок.

Зараз ми трохи пожартуємо навколо математичної індукції. Пропонуємо самостійно проаналізувати наші міркування. **Приклад** Доведемо, що

у всіх дівчат очі одного кольору. (Якого? Це кожен може вибрати до вподоби.)

Отже, доведемо твердження $T(n)$: "У кожній групі з n дівчат всі мають очі одного кольору, наприклад, голубі."

$T(1)$ - вірне. У вашій групі є дівчина з голубими очима.

Нехай $T(k)$ - вірне, тобто в кожній групі з k дівчат усі мають голубі очі. Доведемо, що $T(k + 1)$ вірне. Розглянемо групу з $(k + 1)$ - ї дівчини. Виведемо на деякий час з групи одну дівчину. У тих, що залишилися, за припущенням очі голубі. Повернемо цю дівчину і виведемо іншу. Знову маємо k дівчат, і у всіх очі голубі. Отримали, що у всіх $k + 1$ дівчат очі голубі. Твердження $T(n)$ доведено.

Приклад Доведемо, що у рейсовий автобус поміщається n пасажирів, де n - довільне натуральне число.

Дійсно, $T(1)$ - вірне, один пасажир завжди вміститься в порожній автобус.

Покажемо, що з $T(k)$ випливає $T(k + 1)$. Усі були свідками того, коли в автобусі було k пасажирів і настирливий $(k + 1)$ - й пасажир втискувався в автобус. Отже, за принципом математичної індукції $T(n)$ - вірне для довільного n .

Для самостійної роботи

Пропонуємо довести твердження: "Усі учні - відмінники."

- а) можна методом математичної індукції як у першому прикладі;
- б) можна просто довести всім, що ви можете бути відмінником.

Зауваження. Аналогічно можна довести, що всі учні - двійчники. Але доводити це ні учням, ні вчителям не рекомендуємо.